Il problema della classificazione - evoluzione del concetto di categoria da Aristotele a Kant ed applicazioni alla Matematica dei secoli XIX e XX.

Lezioni di Epistemologia e Storia della Matematica I/1.

Carlo Marchini

La parola *categoria* ha origine greca e deriva da un verbo il cui significato si può tradurre con «affermare» o «accusare».

Nello svolgimento storico al concetto di categoria sono state assegnate molte funzioni: quello di *determinazione universale* di un principio che venga inteso come essere o come pensiero.

Ma ci si riferisce sempre col termine di categoria anche alla *forma* secondo al quale un ente esiste oppure secondo la quale è oggetto di attribuzione.

Ed ancora categoria può essere interpretata come punto di vista secondo cui si pensano o si *giudicano* le cose.

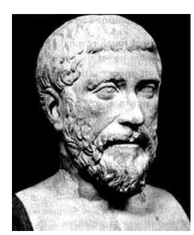
Come si vede non c'è univocità di interpretazione e neppure è semplice decidere se una categoria è un *ente*, oppure una *forma* oppure un *giudizio*.

1. **Il concetto di categoria**

L'interesse per le categorie, viste come un tentativo o un metodo per organizzare la conoscenza determinata, nasce già con le prime forme del sapere umano. **Aristotele** nella *Metafisica*, afferma che gli uomini per loro natura desiderano sapere ed è tipico del sapere *ordinare*, cioè distinguere le cose secondo diverse determinazioni.

Forse la più antica elaborazione del concetto di categoria non è greca, bensì indiana. Il testo che ci fornisce informazioni è il *Vaiséşika–sūtra*, scritto all'inizio dell'era cristiana, ma contenente teorie che risalgono ad epoche precedenti. In tale corrente filosofica vengono indicate sei categorie: *sostanza*, *qualità*, *azione* o *moto*, *unione* o *generalità*, *differenza* o *particolarità*, *relazione reciproca* o *inerenza*.

Nella antica filosofia indiana e cinese lo studio delle categorie viene condotto specificamente dal punto di vista linguistico.



Pitagora
(VI sec. a.C.)

Per la filosofia occidentale, già **Pitagora** e i suoi discepoli propongono la prima *tavola delle categorie*, un primo metodo di categorizzazione in cui ogni nucleo categoriale è concepito come la relazione di due *termini opposti*.

La tavola degli opposti di **Filolao** (V sec. a.C:) comprende *dieci* casi:

determinato - indeterminato,

pari - dispari,

unità - pluralità,

destro - sinistro,

maschio - femmina,

quiete - movimento,

diritto - curvo,

luce - tenebre,

bene - male,

quadrato - figure con lati diseguali.

Si vede in queste contrapposizioni che ruolo importante gioca la Matematica data la preminenza che essa ha nel sistema filosofico di **Pitagora**. Il numero *dieci* ha inoltre rivestito un ruolo importante nella filosofia pitagorica, fondata sul numero.

E' importante per definire un concetto dell'uso della *contrapposizione* che permette di giungere alla sua discriminazione. Questa impostazione richiede un uso delle *sostituzioni*: per decidere se un ente partecipa a (o è classificabile in una) categoria è importante avere la possibilità di confrontare questo con un altro ente e che non partecipi alla medesima categoria. L'operazione mentale che esamina il possibile per comprendere le proprietà è appunto quella di *sostituzione*.

Questi aspetti saranno ripresi da **Aristotele**, anche se le sue formulazioni delle categorie *non* faranno esplicito riferimento alla contrapposizione così come avviene nei pitagorici.

La "scoperta" dell'universale da parte di **Socrate**, cioè la possibilità di riferire più soggetti ad un termine unico e così di porli in relazione mediante tale termine, fa assumere al concetto di categoria un fisionomia più definita. **Platone** nel *Teeteto*, senza usare il termine di categoria, traduce l'astratta formalità dell'universo socratico con le determinazioni *concrete del mondo ideale*, offrendo *proprietà* che sono aspetti generali, dati in coppie di contrapposizione, i cui riflessi compaiono nel mondo sensibile.

La teorizzazione più completa delle *categorie* è di **Aristotele**, cui si deve il nome. Nella categoria **Aristotele** mette in evidenza un duplice punto di vista: in quanto *elemento della realtà* la si può affrontare dal punto di vista *ontologico*; ma nello stesso tempo è una *determinazione del pensiero discorsivo*.

Dal punto di vista ontologico la categoria fondamentale è l'*essenza* o *sostanza* ed essa sta a fondamento delle altre dato che le altre categorie esistono in relazione all'essenza.

Aristotele elenchi differenti di categorie. In *Metafisica*, dice

«Dell'essere in quanto essere si parla in molti sensi. Di questi uno si disse che era quello di accidente, un altro quello di vero (e di falso, per il non essere). Oltre di questi ci sono le forme o determinazioni dell'essere come categorie: ciò che è una cosa, quale, quanto, dove, quando, e se altri significati ci sono, dell'essere in questo modo. Non basta: l'essere ci dice anche o in potenza o in atto».

Ontologicamente: categoria come predicazione dell'essere.

Logicamente: categoria come predicato della proposizione.

Per commentatori moderni la distinzione delle categorie deriverebbe dalla *distinzione grammaticale* di sostantivi, aggettivi quantitativi, qualitativi, comparativi, ecc.

Dall'elenco aristotelico delle categorie: *sostanza*, *quanto*, *quale*, *relazione*, *luogo*, *tempo*, *situazione*, *abito*, *azione*, *passione*, si coglie la differenza tra categorie ed universali.

Considerando due uomini, *animato* è un universale; essere *due* è un accidente, è un predicato che si applica all'ente e rientra nella categoria della *quantità*.

2. **Il sillogismo categorico**

Per **Aristotele** c'è una interpretazione assoluta dell'essere. A proposito della categoria del vero afferma che

«Vero è dire di ciò che è, che è e di ciò che non è, che non è».

Questa interpretazione verrà messa in crisi dai **filosofi della scuola di Megara** (V - IV sec. a.C.)

Per studiare l'organizzazione del pensiero alla luce delle categorie, negli *Analitici Primi*, **Aristotele** introduce il *sillogismo categorico*. Esso è costituito da tre proposizioni categoriche, di cui una, la conclusione segue logicamente dalle altre due, le premesse. Le premesse a loro volta hanno un ruolo dissimmetrico per cui c'è una premessa maggiore ed una minore.

Il punto fondamentale della proposta aristotelica è l'uso dei *quantificatori* e dei *predicati unari*, dato che la categoria è predicata di un oggetto.

Inoltre **Aristotele** usa *lettere* al posto di frasi (predicati) fornendo un primo uso consapevole di simboli per *variabili*.

I sillogismi categorici sono stati presentati nelle lezioni di didattica della Logica inserite in Didattica della Matematica I.

3. **Le categorie nella filosofia post-aristotelica pre-kantiana.**

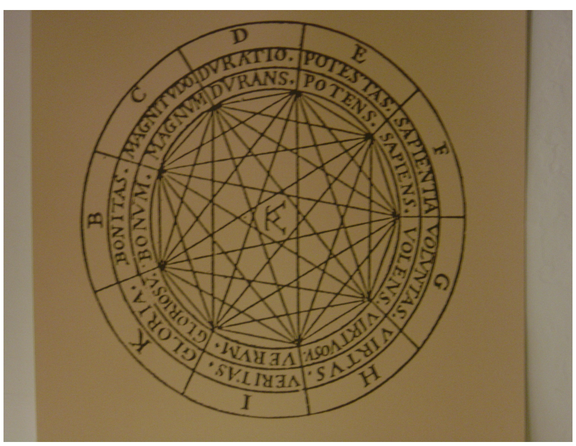
Dopo **Aristotele** la filosofia si occupa anche delle categorie, in tutte le correnti di pensiero del mondo antico e medioevale. **Plotino** distingue le categorie del mondo *intelligibile* da quelle del mondo *sensibile*. Le categorie del mondo intelligibile, secondo lui, possono essere predicate degli oggetti sensibili solo per analogia o somiglianza. Non è lecito però predicare categorie del mondo sensibile per enti del mondo intelligibile.

Da **Severino Boezio** a **S. Anselmo d'Aosta**, i filosofi si attengono all'interpretazione aristotelica di categoria. In particolare **S. Tommaso d'Aquino** riprende l'elenco di **Aristotele**, ordinando però le categorie secondo un criterio di distinzione. Per lui ciò che si può *conoscere* a riguardo di un soggetto è ciò che si può *predicare* di esso.

Interessante è la posizione di **Lullo (Llull)**. Egli ritiene che se il sapere fosse presentato in modo unitario, basandosi però su una rigorosa evidenza, chiunque lo potrebbe attingere.

A questo scopo elabora un'arte generale, di cui le categorie costituiscono una specie di *alfabeto*. Tale arte comprenderebbe i fondamenti di *tutte* le scienze. Ad essa si possono ridurre tutte le proposizioni.

Raimondo Lullo
(1235 - 1315)



Per **Lullo** gli elementi fondamentali sono *diciotto*, di cui nove sono identificati con gli *attributi divini*, che si riscontrano in grado minore in tutti gli enti del creato. I restanti nove sono termini che indicano *relazioni tra esseri contingenti.* Denotati tali elementi fondamentali con lettere dell'alfabeto o altri simboli, attraverso le *combinazione* di questi simboli si ottengono i ragionamenti tipici delle varie discipline.

Erede di questa intuizione lulliana sarà **Leibniz** con l'idea di un'*arte combinatoria* posta a fondamento della *logica*.

In epoca moderna ciascun filosofo fornisce un diverso elenco di categorie.

Cartesio e **Spinoza** ne ammettono tre: *sostanza*, *attributo*, *modo*.

Galileo, **Hobbes** e **Locke** distinguono tra *qualità primarie* e *qualità secondarie*. Le prime ricadono sotto la categoria della *quantità* e su queste si può sviluppare la Scienza, le seconde quella della *qualità* (empirica).

Questa distinzione riprendere quella aristotelica tra *sensibili comuni* (che si possono determinare con l'uso di vari sensi) e *sensibili propri* (che possono essere appresi con l'uso di sensi specifici). Le qualità secondarie, non potendo misurarsi esistono invece solo in quanto sono percepite: *esse est percipi* (**Berkeley**).

Da ciò risulta che non esiste un unico ambito categoriale, ma si ha una molteplicità che nella storia della filosofia si è evoluto ed anche "confuso".

La distinzione tra *qualità primarie* e *secondarie*, o meglio tra *quantità* e *qualità* ha una lunga storia potendosi, in un certo senso, farla risalire alla cosiddetta *crisi degli incommensurabili*, dovuta alla scuola pitagorica.

E' di **Locke** l'intuizione di attribuire alle categorie un aspetto di *funzionalità*, cioè di strumento dell'intelletto umano mediante il quale si producono le relazioni ed i nessi di cui consiste la complessità delle idee.

In **Hume** il criterio fondamentale è sui tipi di qualità associativa, cioè sul modo secondo il quale da un'idea ne scaturisce un'altra. Così facendo gli elementi categoriali sono posti nella *soggettività empirica*, rendendo di fatto impossibile la costruzione scientifica.

4. **Le categorie secondo Kant.**

Alla posizione di **Hume** che nega la possibilità di avere una Scienza, **Kant** contrappone una concezione che pone le categorie nella *soggettività trascendentale*, ristabilendo in tal modo l'universale, però sempre nell'ambito della soggettività, escludendo la manifestazione della realtà in sé. Infatti se la realtà *trascende* il conoscere, bisogna concepire i nessi del conoscere come prodotti dal soggetto, in quanto sue funzioni nella costituzione dell'esperienza.

Le categorie cessano di essere rivelative della struttura della realtà ed assumono il ruolo di concetti fondamentali della *ragion pura*, cioè *forme a priori* della nostra conoscenza, rappresentanti le funzioni essenziali del pensiero discorsivo.

Le categorie risultano *inderivabili* a partire dall'esperienza, ma *condizioni a priori* della possibilità del pensiero in quanto esperienza razionale, ordinata, unificata. La loro funzione, per **Kant**, consiste nell'elaborazione del contenuto dell'esperienza e quindi non valgono per la cosa in sé.

Distingue inoltre le categorie sensibili da quelle intelligibili, proponendo un primo tentativo di *deduzione trascendentale* delle categorie, in opposizione a quanto avviene nella logica classica in cui le categorie sono trovate e *desunte* dall'esperienza.

Da queste premesse nasce (*Critica della ragion pura*) una *tavola delle categorie* che fornisce un elenco di *dodici* categorie presentate a triadi suddivise in base a quatto titoli generali che rappresentano le funzioni dell'intelletto.

Da tali titoli generali secondo **Kant** si ottengono i giudizi di

quantità (universali, particolari, singolari),

qualità (affermativi, negativi, infiniti),

relazione (categorici, ipotetici, disgiuntivi),

modalità (problematici, assertori, apodittici).

Posto inoltre che la sintesi è l'atto di unire diverse rappresentazioni e comprendere la loro molteplicità in una conoscenza, tale sintesi sarà *pura* se il molteplice non è dato empiricamente, ma *a priori*, come quello dello *spazio* e del *tempo*.

Il ruolo dell'intelletto è dare unità alle diverse rappresentazioni in un giudizio, fornendo al contempo un'intuizione, cioè un contenuto trascendentale cui **Kant** attribuisce il nome di *categoria*.

Per quanto riguarda il modo di presentarsi degli enti alla sensibilità, secondo **Kant**, la tavola della categorie è così organizzata:

I - *quantità*	II - *qualità*	III - *relazione*	IV - *modalità*
Unità	Realtà	Inerenza e sussistenza (*substantia et accidens*)	Possibilità-impossibilità
Pluralità	Negazione	Causalità e dipendenza (*causa ed effetto*)	Esistenza-inesistenza
Totalità	Limitazione	Reciprocità (*azione reciproca fra agente e paziente*)	Necessità-contingenza

Alle categorie della *quantità* e della *qualità*, **Kant** attribuisce il nome di *categorie matematiche*.

5. **Le categorie dopo Kant.**

Nell'*idealismo* post-kantiano viene tolta la limitazione delle categorie ad elemento puramente soggettivo, ma vengono interpretate ad un tempo come determinazione del pensiero e della realtà. Ciò è possibile perché a differenza di quanto proposto dalla filosofia antica, la categoria non é percepita più come determinazione dell'essere trascendente, ma viene posta nella realtà immanente.

Hegel identifica la categoria con ogni determinazione dello sviluppo dialettico della logica, anche se non identificabili con le categorie aristoteliche.

Il **Renouvier** (1815 - 1903) identifica le categorie con

«nozioni astratte che esprimono relazioni d'ordine generale, dalle quali le percezioni sensibili ricavano forme e alle quali tali percezioni sono assoggettate come a loro condizioni di rappresentazione, così come per i giudizi che sono loro applicabili»,

James Stuart Mill
(1806 - 1873)

assumendo quindi un'interpretazione relazionale delle categorie, ed in esse si realizzerebbe la presenza di una tesi, di un'antitesi e di una sintesi. Ad esempio nella categoria della *successione* è presente l'*istante* (*tesi*), il *tempo* (*antitesi*) e la *durata* (*sintesi*).

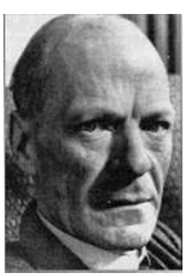
Stuart Mill in accordo alla sua tesi che *la conoscenza ha origine empirica*, propone quattro categorie come zone dell'esperienza.

Benedetto Croce
(1866 - 1952)

Croce respinge una qualsiasi tavola della categorie, perché frutto di confusione tra *pensiero* e *pensiero come scienza del pensiero*. Nel pensiero individuale sono affermate le *categorie*, ma la logica non formula giudizi per affermare quali siano i termini predicabili, i concetti puri, cioè le *categorie*, con le quali si pensa la realtà. Esse divengono così *momenti del divenire* sia del reale che del pensiero e sono date da: *estetica*, *logica*, *morale*, *economia*, come traduzione delle *quattro forme dello Spirito*: *bello, vero, buono, utile*.

Giovanni Gentile
(1875 - 1944)

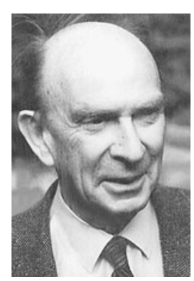
Per **Gentile** la categoria non è un predicato che assorba in sé il soggetto né funzione che volendo essere sintesi a priori espunga il reale, ma è *pensamento del reale*, è *autosintesi* della logica del concreto, che realizza l'unità della *categoria predicato* (di ascendenza aristotelica) con la *categoria funzione* della logica trascendentale. Quindi la categoria fondamentale è il *pensiero* che si realizza in tre momenti: *arte* (tesi), *religione* (antitesi) e *filosofia* (sintesi).



Gilbert Ryle
(1900 - 1976)

Queste posizioni anti-scientifiche hanno influenzato ed influenzano tuttora la scuola italiana, non sono diffuse a livello internazionale. Ad esempio **Husserl** e **Peirce**, pur abbandonando l'impostazione trascendentale del problema delle categorie, accettano che esse designino le strutture ideali ricavate dalla realtà.

In Logica **Russell** identifica le *categorie* con i *tipi*.



Peter Strawson
(n. 1919)

Gli Analitici oxfordiani **Ryle** e **Strawson**, interpretano le categorie in ambito linguistico come i *modi convenzionali* con cui vengono utilizzati i concetti nel linguaggio specialistico e in quello naturale.

6. **Il ruolo delle categorie in Matematica.**

Come si è visto il significato di *categoria* non è univoco.

6.a - Quiete e moto. Grande assente (apparentemente dato che **Kant** e **Brouwer** utilizzano il tempo come "sorgente" del concetto di numero) dalla Matematica è il *tempo*. Tuttavia in essa si ritrovano, ad esempio, le categorie di *moto* e *quiete*, se si preferisce tra *statico* e *dinamico* oppure tra *essere* e *divenire* che ricatturano in modo diverso il tempo.

La Geometria è l'ambito privilegiato in cui si dà ampio spazio alla categoria dello *spazio*. Però anche il *tempo* viene utilizzato. Si rifletta che è molto difficile, se non impossibile separare *spazio*, *tempo* e *moto*. Per misurare il *tempo* si utilizza lo *spazio* e il *moto* (lancette dell'orologio). Per misurare lo *spazio* si utilizza il *moto* e il *tempo*, infine per ottenere il *moto* si usano *spazio* e *tempo*.

La Geometria oggi si presenta sotto vari aspetti. Ad esempio si parla di

Geometria sintetica di ascendenza euclidea, studia le proprietà delle figure date;

Geometria delle trasformazioni che la seconda si basa sull'idea di movimento rigido, per altro già presente in Euclide nel primo criterio di eguaglianza dei triangoli, con l'idea di sovrapponibilità.

Ad esempio detto *asse* di un segmento la retta passante per il punto medio del segmento e perpendicolare ad esso, per dimostrare che ogni punto dell'asse è equidistante dagli estremi del segmento, si può procedere

- secondo la *Geometria sintetica* si considerano i due triangoli rettangoli che si ottengono congiungendo il punto dell'asse preso in considerazione con gli estremi del segmento e si utilizza il secondo criterio di eguaglianza dei triangoli;
- mediante la *Geometria delle trasformazioni* si mostra che gli estremi del segmento si corrispondono nella simmetria assiale avente per retta unita l'asse del segmento. Quindi considerati i due segmenti congiungenti gli estremi del segmento con il punto arbitrario dell'asse, essi si corrispondono nella simmetria e pertanto risultano eguali.

Nei programmi è stata data grande evidenza alla *Geometria delle trasformazioni*, ma si tratta di uno dei temi meno frequentati da parte degli insegnanti, forse perché nella loro formazione è mancato questo approccio.

C'è una terza Geometria, quella *cartesiana*. Con tale tipo di Geometria l'asse del segmento è individuato come retta perpendicolare per il punto medio del segmento e la dimostrazione dell'equidistanza dei suoi punti dagli estremi del segmento viene ottenuta con un computo numerico applicando la formula della distanza tra due punti. Inoltre in essa le trasformazioni si presentano come sistemi di equazioni. Se questa modalità può essere utile per altri scopi (classificazione dei gruppi di trasformazioni), però così facendo si abbandona la categoria del *movimento* in favore di quella della *quiete*. E questa scelta viene spesso preferita dai docenti che si trovano a disagio con l'approccio dinamico, utilizzando il più consueto approccio algebrico.

Anche in *Algebra* si può riscontrare questa contrapposizione tra *quiete* e *moto*. Un esempio sono i *polinomi*. Essi vengono definiti in modo diverso fornendo l'immagine di un ente in "quiete". Subito dopo però si fa riferimento non più al polinomio, ma alla *funzione polinomiale*, chiamandola ancora col nome di polinomio e vedendo quindi la scrittura come un *operatore* che esegue una *trasformazione*.

Le strutture algebriche solitamente vengono viste come enti statici e ne fa fede, soprattutto nelle scuole secondarie, l'uso di *tabelle a doppia entrata* che fotografano le operazioni.

Poi si scopre che questa presentazione è insufficiente e si fa entrare in gioco il concetto di *omomorfismo*, nelle sue varie accezioni e con esso lo studio delle strutture avviene *dall'esterno* della struttura stessa, privilegiando l'idea di trasformazione, cioè di *movimento*.

In *Analisi* contrapposizione tra *quiete* e *moto* è presente nel concetto di *funzione* che riassume intuizioni diverse, come visto nelle lezioni di Didattica della Matematica.

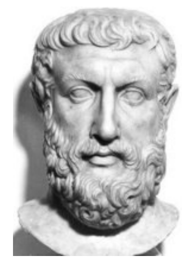
Ma forse l'argomento che più offre motivo di approfondimento è il concetto di *limite* (e sue conseguenze) e la sua descrizione in termini analitici, in cui spesso ci si avvale del moto (*tendere*) e della quiete (*definizione* $\varepsilon - \delta$). Come mostrano alcuni studi, già dalla scuola elementare mediante il movimento è intuitivo un concetto di *continuità* che poi interagisce pesantemente con la definizione di funzione e di limite.

La contrapposizione tra le categorie di *quiete* e *moto*, o meglio tra *essere* e *divenire*, la si ritrova anche a livello più alto in Logica. I *modelli di Kripke* cui si è accennato in precedenza, inglobano l'idea di una trasformazione, in contrapposizione ai modelli della Logica classica che sembrano più legati alla categoria della quiete.

Il *problema ontologico* della Matematica che si può riassumere in modo impreciso, ma di facile comprensione, se gli enti di cui si occupa la Matematica si *scoprono* o si *inventano*, risente di questa dicotomia che coglie il nucleo categoriale presente nella contrapposizione tra *essere* e *divenire*.

6.b – *Quantità e qualità.* La categoria *quantità* è all'origine del pensiero di **Pitagora**, che diede al numero il ruolo di elemento fondamentale dell'universo. L'incommensurabilità mette in crisi l'identificazione e la applicabilità della categoria della *quantità*.

Zenone di Elea
(V sec. a.C.)



Parmenide di Elea
(VI – V sec. a.C.)

Zenone per difendere le tesi razionalistiche di **Parmenide** mostra che supporre la *quantità* (*infinita*) porta a paradossi. A questi argomenti la risposta di **Aristotele** è duplice, da una parte evita l'*infinito in atto*, *statico*, con l'*infinito in potenza*, vale a dire in *divenire*. D'altra parte, facendo proprie le posizioni di **Eudosso** attribuisce alle entità geometriche il ruolo di *grandezze*, vale a dire sottraendo la Geometria alla *categoria* della *quantità* e studiandola sotto la *categoria* della *qualità*.

Il pensiero di Euclide è simile: le rette euclidee *non hanno punti*, non sono cioè collezioni di punti (come purtroppo si trova oggi su molti testi), quindi non sono *quantità*, ma hanno solo aspetti *qualitativi*.

Il passaggio dagli aspetti qualitativi a quelli quantitativo è esemplificato dagli odierni procedimenti per determinare le soluzioni delle equazioni algebriche di secondo grado. La presentazione odierna di tali equazioni privilegia la forma $ax^2 + bx + c = 0$, che non si riscontra in Euclide. Il motivo è semplice. Il significato dei coefficienti è completamente diverso. Per Euclide e per tanti matematici anche dopo la risoluzione delle equazioni di quarto grado, a è un numero (razionale positivo), b è un segmento, c è un'area e l'eguaglianza posta è l'eguaglianza tra aree. Ma la somma di aree non è nulla, quindi le equazioni di secondo grado si presentano in tre tipi diversi: $ax^2 = bx \pm c$, $ax^2 \pm bx = c$, $ax^2 \pm c = bx$, in cui i valori dei coefficienti sono sempre positivi e le eventuali sottrazioni si hanno senso in quanto il minuendo è maggiore del sottraendo, e che richiedono costruzioni geometriche diverse. La natura delle equazioni algebriche di grado superiore al terzo non si poteva facilmente inquadrare nell'ambito della categoria qualità, dato che non erano considerate grandezze geometriche idonee e quindi ha tardato molto ad essere affrontata.

A lungo la Geometria è stata la Matematica della *qualità*.

Severino Boezio propone che la formazione di livello superiore dei giovani si articoli secondo le categorie di *quiete* e *moto*, di *quantità* e *qualità*. Questo schema ispirerà l'istruzione per secoli.

	Qualità	**Quantità**
Quiete	*Geometria*	*Aritmetica*
Moto	*Astronomia*	*Musica*

Tranne poche eccezioni della tarda grecità, solo con lo sviluppo della matematica araba prima, di quella rinascimentale poi, la *quantità* riappare nella Matematica. Dal XVI per le applicazioni della Matematica alla Fisica, si può dire che la *quantità* (*qualità primarie*) predomini sulla qualità.

Con la nascita della Geometria cartesiana si ha preminenza dell'aspetto quantitativo proprio nella disciplina regina degli aspetti qualitativi. In questo senso il moderno sviluppo della Logica pare una rivincita della qualità sulla quantità.

Un primo tentativo di fusione tra qualità e quantità si ha con la teoria delle grandezze che si incontra nel V libro di **Euclide**: certi enti costituiscono una classe di grandezze se possono essere confrontati e sommati, inoltre è possibile determinare il multiplo ed il sottomultiplo di una *grandezza* (qualitativa).

Non è possibile però moltiplicare due grandezze tra loro, o meglio in quei casi in cui è possibile (ad esempio segmenti) si ottiene un ente (rettangolo o estensioni piane) che non fa parte della classe di grandezze considerate.

Quest'ultimo passo viene eseguito con la teoria dei *numeri reali* che rappresenta la completa fusione tra *quantità* e *qualità*, che appare in modo non esplicito già con gli algebristi rinascimentali, rendendo così possibile il prodotto e la potenza di numeri reali e il trattamento "omogeneo" delle equazioni algebriche.

Tuttavia il modello mentale della categoria *quantità* è ancora presente in modo separato da quella della *qualità*.

L'irruzione del *computer* ha rimescolato questi aspetti: si può affermare che un computer è un insieme molto numeroso di *interruttori* (*quantità*) ma proprio grazie a questa numerosità si ottengono aspetti a lungo ritenuti *qualitativi*: *colore*, *suono*, *intelligenza artificiale*.

Fischbein ha messo in evidenza che intuitivamente una moltiplicazione è sempre un multiplo secondo un numero naturale positivo (*quantità*), per cui perde di significato il numero $\pi \cdot \sqrt{3}$, dato che nessuno dei due fattori permette di interpretare la moltiplicazione come somma ripetuta di uno tante volte quante indicate dall'altro (*qualità*).

Efraim Fischbein
(1920-1998)

Anche la lingua italiana tiene conto di questi aspetti: i termini (o fattori) presenti in un prodotto vengono indicati con gli appellativi asimmetrici di *moltiplicando* e *moltiplicatore*. Questa asimmetria è presente tipicamente negli spazi vettoriali, in cui ci sono *vettori* (*grandezze*) e *scalari* (*quantità*), quindi in un prodotto il moltiplicando si può ascrivere alla categoria della *qualità*, il moltiplicatore a quella della *quantità*.

L'idea poi che funzioni (**Locke**) e relazioni (**Kant** e **Renouvier**) possano essere *categorie* è diffusa dell'empirismo inglese in poi. Tali concetti, importati nella Matematica trovano, nella nostra disciplina, una definizione e forse l'indagine filosofica può avere giocato un ruolo importante nell'accentrare l'attenzione dei matematici su tali temi.

Ed infatti le definizioni date si sono via via precisate fino alla sistemazione attuale dovuta alla scuola bourbakista che pare il migliore compromesso tra un'esigenza di generalità ed applicabilità.

Mac Lane, uno dei creatori della teoria matematica delle categorie, ha scritto un interessante testo, *Mathematics Form and Function* (1986), in cui propone che le categorie fondamentali in cui si estrinseca l'intera Matematica siano due, la *forma* e la *funzione* e mostra come ciò sia possibile.

Saunders MacLane
(1909-2005)

6.c – *Determinismo – indeterminismo.*

La distinzione tra *determinismo* e *indeterminismo*, oggi attiva nella Matematica, trova difficilmente posto nella classica elencazione delle categorie. Il *determinismo* prende spunto dalla rivoluzione scientifica galileiana e trova suoi sostenitori in vari filosofi e scienziati, tra cui **Cartesio** (con il meccanicismo) **Hobbes** e **Spinoza**.

Pierre Simon de Laplace
(1749 - 1827)

Si suole riconoscere nel *Saggio filosofico sulle probabilità*, del 1814 di **Laplace** la più compiuta espressione del determinismo in ambito scientifico. Egli affronta in modo critico i problemi posti dall'applicazione del calcolo delle probabilità allo studio dei fenomeni naturali, ciò perché la probabilità rientra in modo naturale nella *categoria* dell'*indeterminismo*, in piena contraddizione con la linea di pensiero dominate in quel tempo.

Pierre Boutroux
(1845 - 1921)

Henri Bergson
(1859 - 1941)

In epoca successiva **Boutroux** e soprattutto **Bergson** propongono che il *determinismo* non sia applicabile alla natura. La "conferma" di questa tesi si ha nel 1927 con l'enunciazione del *principio di indeterminazione* da parte di **Heisenberg**. La Fisica moderna ha fatto ampio uso della Statistica e quindi del concetto di caso, già introdotto e studiato da **Gauss** e da **Peirce**, visto non come arbitrio della natura, ma come possibilità di comportamento.

Werner Heisenberg
(1901 - 1976)

Nella moderna *Teoria delle Probabilità* sono presenti diverse interpretazioni del concetto di probabilità, che si presentano come adeguamenti diversi all'indeterminismo.


Karl Friederich Gauss
(1777 – 1855)

Non è un caso se la più utilizzata interpretazione della probabilità è quella classica (di **Laplace**) che vede la *probabilità* come il *rapporto tra numero dei casi favorevoli e dei casi possibili*, ritenuti equiprobabili, pur essendo tale nozione, come mostrato da molti, illecita perché fa uso essa stessa della probabilità.


Andrey Kolmogorov
(1903 - 1988)

L'assiomatizzazione di **Kolmogorov**, data nel 1933, pur lasciando alcuni punti poco chiari completa il percorso di Laplace riducendo l'*indeterminismo* e alla teoria della misura che è *deterministica*.
L'approccio classico è maggiormente presente nelle introduzioni scolastiche al Calcolo delle Probabilità ed alla Statistica, che però non fanno uso della teoria della misura, pertanto insegnanti e studenti, non avendo i mezzi tecnici adeguati sperimentano le difficoltà di approccio all'*indeterminismo*.
Secondo la teoria classica si può dire che la categoria dell'*indeterminismo* ha connotati aristotelici, è *in re*, essendo la probabilità una sorta di caratteristica dell'evento in sé.


Bruno De Finetti
(1906 - 1985)


Richard von Mises
(1883 - 1953)

L'approccio soggettivista (**De Finetti**) alla probabilità vede invece l'*indeterminismo* come una sorta di categoria kantiana (legata alla esperienza del soggetto) che stabilisce la probabilità come la posta che è disposto a scommettere sulla base delle proprie informazioni, in un gioco equo. Il frequentismo (**Von Mises**) sposta invece l'attenzione attribuendo all'*induzione* il ruolo dell'*astrazione* per cui la probabilità diviene il limite della frequenza relativa.

7. **Classificazioni.**

Le *categorie* e gli *universali* rivelano l'esigenza primaria di organizzare la conoscenza attraverso comode rappresentazioni, suddividendo il conoscibile.

7.a – *Classificazioni e partizioni in Matematica.* La classificazione è usata in Matematica come traduzione

- *degli universali*

- *delle categorie*;

grazie alla diffusione del *linguaggio degli insiemi* ed al privilegio degli *aspetti estensionali*.

Nella Matematica di oggi permangono retaggi della Matematica che prescindeva dagli insiemi e ciò può essere fonte di difficoltà per gli studenti che si trovano a gestire codici linguistici diversi, soprattutto se essi non vengono adeguatamente spiegati e messi in evidenza dall'insegnante.

A riprova di quanto sia importante classificare, nei programmi delle scuole elementari (1985), tra gli obiettivi di 1a e 2a si ha

« - classificare oggetti, figure, numeri … in base ad un dato attributo e viceversa, indicare un attributo che spieghi la classificazione data ».

Nell'obiettivo rientrano problemi di *osservazione*. E' il primo passo per le *discriminazioni* nell'ambito del riconoscimento di *analogie e differenze*. Le attività perseguono finalità sia nella dimensione *concettuale* (costruzione delle immagini mentali), sia nella dimensione *linguistica* (ricchezza lessicale e semantica). Inoltre mettono in gioco l'*orientamento*, la *lateralizzazione*, mediante il disegno di oggetti assegnati.

La rappresentazione grafica, ma non solo con questo tipo di rappresentazione, può essere strumento per valutare se lo scolaro ha colto aspetti comuni (*costanti*) ed eventuali differenze (*variabili*).

In queste attività bisogna tenere conto delle abilità del bambino, in base all'età. Alcune attività più specificamente logiche utilizzano *conoscenze aritmetiche*, *geometriche* e *conoscenze specifiche* di altre discipline, usate come strumenti per la risoluzione dei quesiti.

Bisogna però chiarire cosa intendere per *classificazione* ed *attributo*. Un attributo, secondo il dizionario Devoto-Oli, è una determinazione qualitativa che si riconosca come propria ed essenziale; linguisticamente si realizza con un aggettivo qualificativo, cioè, sempre il Devoto-Oli, un aggettivo che, riferito ad un sostantivo ne determina una qualità. Interessante è la posizione linguistica dell'attributo rispetto al sostantivo cui si riferisce. Il dizionario afferma che se l'aggettivo è preposto al sostantivo, la qualità è intesa come intrinseca e permanente (*universale*?): *la vecchia città*, mentre se viene posposto la qualità è sentita come parziale o contrapposta (*categoria*?): *la città vecchia*.

Un attributo, solitamente, si realizza con un aggettivo qualificativo. Sorge immediato un dubbio: nella frase

il dado è rosso

per attributo si intende *rosso* oppure per attributo si intende il *colore*?

Stando alle parole di **Husserl**, *rosso* è un universale ottenuto per astrazione, *colore* è una categoria che rientra in quella di *qualità*.

Se per attributo si intende *rosso*, ogni insieme di oggetti in esame viene *spezzato* in due (in Logica classica).
Se dunque *rosso* è un attributo, sono possibili tanti *attributi* quanti sono i *sottinsiemi* di un insieme e, nel caso di insiemi infiniti, resta in sospeso il problema assai delicato di determinare in *quanti modi* un dato sottinsieme (*estensione*) possa essere descritto mediante frasi della lingua (*intensione*).
Credo però che gli esempi più frequenti di classificazione riguardino le *categorie qualità*: colore, forma, materia, uso, ecc., oppure *quantità*: numerosità, lunghezza, peso, ecc.
Un *attributo* (in questo senso generale) è in realtà una *famiglia di attributi*, intesi come aggettivi, quelli in cui la qualità può essere ripartita. Si può anche analizzare l'attributo generale o la famiglia di attributi mediante un'unica relazione binaria descritta da: «x è dello stesso … di y», dove i puntini vanno riempiti con l'attributo generale del caso: colore, forma, materiale, posizione, lunghezza,….
Ovviamente ci sarebbe da decidere se si tratta di *categoria* aristotelica o kantiana.
Si ha dunque una diversa interpretazione matematica del concetto di attributo. Se esso è inteso come aggettivo (*universale*), dà luogo ad una (eventuale) suddivisione dell'insieme in due parti (*partizione dicotomica*); se è inteso come qualità (*categoria*) ad esso si associa una relazione di equivalenza e/o la relativa partizione dell'insieme.
E' rimasto per ora in sospeso il problema di come vada interpretata la parola *classificazione.* La pratica matematica e l'esperienza delle Scienze naturali fanno pensare alla classificazione come ad una versione delle *relazioni di equivalenza* o le *partizioni* da esse indotte, privilegiando l'attributo visto come *categoria*.
Ma ci sono esempi in natura (*Euglena Viridis* nella classificazione degli organismi in *autotrofi* ed *eterotrofi*) e in Matematica che portano ad accettare questa posizione con riserva: la classificazione dei *triangoli* in base ai lati (s*caleni, isosceli, equilateri*) o a quella dei *parallelogrammi* (r*ettangoli, rombi, quadrati*).
Definizione. Dato un insieme A una *classificazione su (di) A* è un insieme S tale che

1] $S \subseteq \mathcal{P}(A)$

2] $\cup(S) = A$

3] $\forall B \in S (B \neq \emptyset)$.

Banalmente ogni *partizione* S di A è una *classificazione* su A, dato che per una partizione si richiedono le condizioni 1] - 3] precedenti più la condizione

4] $B \in S \wedge B' \in S \wedge B \neq B' \rightarrow B \cap B' = \emptyset$,

ma non vale il viceversa.

Le partizioni sono associate a relazioni di equivalenza ed anche a funzioni suriettive. Per essere più espliciti: ad una *partizione* è associata in modo naturale una *relazione di equivalenza*, ad una *relazione di equivalenza* è associata in modo naturale una *partizione*. Se si ripete tale procedimento di associazione si ritrova la relazione di equivalenza (partizione) di partenza.

D'altra parte le partizioni sono strettamente connesse alle applicazioni (funzioni) *suriettive* (1° *Teorema dell'Omomorfismo* (o Isomorfismo)). Le cose non vanno così con le classificazioni.

Molto spesso i problemi che appaiono sui manuali ed anche su alcune riviste sono fuorvianti o mal formulati. Talora vengono confusi gli aspetti intensionali ed estensionali. Anche nei programmi del 1985 si chiede:

« - *in contesti problematici concreti e particolarmente semplici, individuare tutti i possibili casi di combinazioni di oggetti ed attributi*; ».

Talvolta la richiesta è quella di di costruire tutti i possibili insiemi (sottinsiemi) a partire da un insieme dato, ma esercizi del genere spesso sono al di là delle capacità degli scolari.

Dato un insieme A, finito, con n elementi, con $n \geq 1$, i sottinsiemi che si possono formare sono in numero di 2^n (classificazioni per *universali*).

Per le partizioni di A, per ogni coppia di numeri naturali n,m, indicato con $p_m^{(n)}$ il numero delle partizioni di un insieme A con n elementi, aventi m classi che è dato dal numero delle funzioni suriettive di dominio A e codominio un qualunque insieme con m elementi. Si trova banalmente che $p_m^{(n)} = 0$ se $n < m$; $p_1^{(n)} = p_n^{(n)} = 1$. Un ragionamento un poco più complesso porta all'espressione ricorsiva $p_{m+1}^{(n+1)} = (m+1)\ p_{m+1}^{(n)} + p_m^{(n)}$. Da questa espressione si prova, per induzione, ad esempio, che se $n \geq 2$, $p_2^{(n)} = 2n\text{-}1 - 1$ e $p_{n-1}^{(n)} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Con pazienza è allora possibile calcolare il numero delle partizioni su un insieme con n elementi, $P^{(n)} = \sum_{m=1}^{n} p_m^{(n)}$ sommando i numeri delle partizioni con una classe, con due classi e così via fino al numero delle partizioni con n classi e procedendo ricorsivamente. Il numero $P^{(n)}$ è però dato, in forma chiusa, dalle formule di **James Stirling** (1692 – 1770) di seconda specie.

Ancora più complessa è la determinazione del numero $K^{(n)}$ delle classificazioni di un insieme con n elementi. Si ha:

$$K^{(n)} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} (-1)^{n-h} 2^{2^h} - 1$$

Con tali formule si ottengono i seguenti numeri di partizioni e di classificazioni:

$n = 1$	$P^{(1)} = 1$	$K^{(1)} = 1$	$2^{2^1} = 4$
$n = 2$	$P^{(2)} = 2$	$K^{(2)} = 5$	$2^{2^2} = 16$
$n = 3$	$P^{(3)} = 5$	$K^{(3)} = 109$	$2^{2^3} = 256$
$n = 4$	$P^{(4)} = 15$	$K^{(4)} = 32.297$	$2^{2^4} = 65.536$
$n = 5$	$P^{(5)} = 52$	$K^{(5)} = 2.147.321.017$	$2^{2^5} = 4.294.967.296$

Nell'ultima colonna è indicata la cardinalità di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$, il numero dei sottinsiemi dell'insieme delle parti di un insieme, per confrontarlo con la cardinalità dell'insieme delle classificazioni. Come si vede già da questi valori, il numero delle classificazioni è di gran lunga superiore a quello delle partizioni ed è $2^{2^n-2} < K^{(n)} < 2^{2^n-1}$, risultando per valori di n abbastanza grandi, molto prossimo a quest'ultimo (ad esempio $K^{(5)} = 2.147.231.107$ e $2^{2^5-1} = 2^{31} = 2.147.483.648$), per cui senza troppo errore si può approssimare $K^{(n)}$ con 2^{2^n-1}. Nell'esempio per $n = 5$, l'errore è 0,00757%

Per fare meglio capire, sia $A = \{a_1,a_2,a_3\}$; una *partizione* di A è data da $\{\{a_1,a_3\},\{a_2\}\}$; una di *classificazione* di A che non sia una *partizione* è $\{\{a_1,a_3\},\{a_2,a_3\}\}$. Classificazioni e partizioni hanno tipi di complessità maggiore degli insiemi che si considerano, in quanto hanno almeno due parentesi graffe aperte (chiuse), essendo insiemi di insiemi. Tale complessità ostacola la comprensione, specie se si introducono gli insiemi come collezioni di 'elementi' di oggetti concreti.

E' possibile determinare *estensionalmente* tutte le classificazioni di un insieme finito, mentre gli attributi che sono applicabili ad esso, dal punto di vista *intensionale*, sono infiniti in quanto più attributi possono dare luogo alla stessa classificazione.

E' ovvio che la richiesta di determinare tutte le possibili classificazioni di insiemi anche con pochi elementi è molto al di là degli scopi (e forse anche delle possibilità) degli scolari di scuola elementare.

Se si identifica classificazione con partizione, il concetto di *relazione* (termine con un'origine filosofica ricavata dalle categorie) è fondamentale.

Definizione. Sia a un insieme e sia $r \subseteq a^2$. Si dice che r è una *relazione (binaria) in* o *su a*. Se $x,y \in a$ si preferisce usare la scrittura xry in luogo di $\langle x,y\rangle \in r$.

- r è *riflessiva* <u>*in*</u> o <u>*su*</u> *a* se $\forall x \in a(xrx)$; in modo equivalente si dice che r è *riflessiva* <u>*in*</u> o <u>*su*</u> *a* se $\forall x,y \in a(x = y \to xry)$.
- r è *simmetrica* se $\forall x,y(xry \to yrx)$;
- r è *transitiva* se $\forall x,y,z(xry \wedge yrz \to xrz)$.

Tali definizioni si devono a **De Morgan**, tranne la proprietà riflessiva che si deve a **Vailati**.

Definizione. Sia r una relazione in a e sia $x \in a$, allora l'immagine di $\{x\}$ mediante r, cioè $r[x] = \{y \mid xry\}$ si denota con $[x]$ o talora $[x]_r$ e si chiama ***la** classe di x in r*. In tale caso x viene detto ***un** rappresentante della classe* L'insieme delle classi $\{[x]_r \mid x \in a\}$ viene detto *insieme quoziente di a rispetto a r* e denotato col simbolo $(a_{/r})$.

Alcune proprietà delle relazioni possono essere caratterizzate per mezzo delle classi:

Teorema. Sia $r \subseteq a^2$, allora

- r è *riflessiva su a* sse $\forall x \in a (x \in [x])$;
- r è *simmetrica* sse $\forall x,y (y \in [x] \rightarrow x \in [y])$;
- r è *transitiva* sse $\forall x,y,z (y \in [x] \wedge z \in [y] \rightarrow z \in [x])$.

Un esempio di relazione riflessiva, simmetrica e transitiva è l'*eguaglianza*. Ciò mostra che queste tre proprietà non sono sufficienti a caratterizzare l'eguaglianza. Manca la sostitutività, di cui si parla nelle lezioni sugli Universali.

Alcune semplici proprietà delle relazioni di equivalenza sono date dal seguente

Teorema (delle classi disgiunte). Sia r una relazione di equivalenza su a, allora $(\bigcup_{y \in a}[y] = a)$ e $\forall x,y \in a([x] = [y] \vee ([x] \cap [y]) = \emptyset)$.

Nel caso di relazioni di equivalenza, associate quindi a categorie, le classi di equivalenza vengono interpretate come *definizioni per astrazione* tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX. In particolare viene utilizzata da **Cantor** e da **Russell** nella definizione di cardinale ed ordinale. Una "giustificazione" filosofica può essere individuata nei brani di Ardigò riportati nelle Lezioni sugli Universali. In seguito questa strada delle definizione per astrazione mediante classi di equivalenza sarà utilizzata da **Peano** e da **Meray** per la definizione dei vari sistemi numerici.

Giuseppe Peano
(1858-1932)

Charles Meray
(1835-1915)

Relazioni e classi delle relazioni di equivalenza sono un esempio della traduzione matematica di aspetti *qualitativi*.

Un esempio di Matematica elementare di come possano essere utili le relazioni di equivalenza e di come talora si oper non su elementi, ma sulle classi. La *prova del nove* controlla velocemente il risultato di un'operazione, mediante l'addizione delle cifre che compongono i numeri coinvolti.

Così per verificare che $23 \times 58 = 1334$, basta considerare il prodotto di 5 (= 2+3) per 13 (= 5+8). Ma invece di considerare 5×13, si addizionano di nuovo le cifre e dato che 13 ha come somma delle cifre 4, basta moltiplicare $5 \times 4 = 20$. Anche al risultato si applica il procedimento per trovare che 20 fornisce 2. D'altra parte 1+3+3+4 = 11 ed ancora 1+1 = 2.

Tutto questo procedimento solitamente si esegue di fianco alla moltiplicazione riportando una "crocetta" su cui si scrivono appunto i numeri 5, 4, 2, 2.

Il significato dell'operazione di addizione delle cifre è un "trucco" per trovare velocemente il resto della divisione per 9.

Infatti 23 dà resto 5, infatti 23 = 2×9+5; 58 = 5×9+13 = 6×9+4; 20 = 2×9+2; 1334 = 148×9+2; 11 = 1×9+2.

La relazione di equivalenza $r \subseteq \mathcal{N}^2$ è individuata così: per ogni $n,m\in \mathcal{N}$, $\langle n,m\rangle \in r$ sse i resti della divisione per 9 di n e di m sono *eguali*. Si ha $23r5$; $58r13$;$58r4$;$13r4$; ecc.

Si ha [0] = {0, 9, 18, 27, …}; [1] = {1, 10, 19, 28, …}; [2] = {2, 11, 20, 29, …}; ecc. Qui è usata una notazione scorretta per indicare questi insiemi, che non sono dati per elencazione (impossibile perché ogni classe ha infiniti elementi), ma solo per suggerirne le proprietà caratteristiche. Più correttamente $[4] = \{n\in \mathcal{N} \mid \exists m\in \mathcal{N}\,(n = m\times 9 + 4)\}$. L'iterazione della procedura di somma delle cifre vista nella considerazione precedente che parte 1+3+3+4 = 11 ed ancora 1+1 = 2, potrebbe farci ritenere che di fatto ci sia più di una relazione di equivalenza. La prima si applica al numero 1334 e fornisce la classe [11] , la seconda si applica a [11] e restituisce [2]. Quindi la prima procedura è l'*omomorfismo canonico* che associa ad ogni elemento di $\mathcal{N}$ la sua classe di equivalenza, la seconda procedura si applicherebbe all'insieme quoziente $\mathcal{N}_{/r}$ e applicata ad una classe darebbe luogo ad una classe. Così non è perché la classe corrispondente in questa procedura sarebbe la stessa, quindi, lavorando sugli elementi sembra che si applichino due procedimenti diversi, ma lavorando sull'astrazione degli elementi data dalle classi di equivalenza, e non sugli elementi, di fatto questo non è altro che il riconoscere nella classe un elemento privilegiato. Dunque il secondo passaggio è l'istituzione della relazione di equivalenza $11r2$, che di fatto opera ancora sugli elementi di $\mathcal{N}$.

Si noti che mentre con certe relazioni è facile individuare un rappresentante privilegiato, in altri casi ciò è impossibile.

7.b – *Classificazioni e partizioni nelle scienze della natura*. Le nozioni viste sopra possono essere usate come modelli per organizzare la conoscenza nelle altre scienze naturali.

Il naturalista ha costruito *classificazioni specifiche*, il matematico si è interessato di ricondurre ad una forma unitaria tutta le varie occasioni di *classificazione*.

Secondo il criterio più usato in Biologia, alle *classi* di equivalenza corrispondono le *specie*. **Linneo** ha saputo cogliere mediante somiglianze morfologiche e di comportamento che si poteva istituire una relazione di equivalenza, senza conoscere assolutamente il termine e la teoria.

Rimanendo all'ambito biologico si può mostrare come vengano usate contemporaneamente relazioni d'ordine e di equivalenza. Ad esempio questo schema tratto da un testo di Biologia, assomiglia a certi tabelloni di tornei sportivi. Qui la relazione è data dalla distinzione tra *Regno*, *Phylum* e *Classi*. Dal punto di vista matematico, lo schema può essere interpretato in due modi, traducendo i tratti orizzontali con $\in$, oppure $\subseteq$. La differenza non è matematica, è *biologica*!

Regno	Phylum	Classe
Monere - - -	batteri (schizomiceti) - - - - - -	micoplasmi
		rickettsie
		clamidobatteriacee
		actinomiceti
		eubatteri
		mixobatteri
		spirochete
	alghe azzurre	

Per alcuni scienziati esistono solo gli esseri viventi e la classificazione non è altro che fornire suddivisioni diverse dell'insieme degli esseri viventi.
Per altri studiosi, forse preoccupati di non legare esageratamente la loro disciplina all'esistente, esistono gli esseri viventi che vengono classificati in *specie*.
L'insieme delle specie, non ha più elementi concreti, viene classificato in *generi*.
L'insieme dei generi a sua volta viene classificato in *famiglie* e così via fino ai *regni*.
Così se sulla Terra scompaiono tutti gli esseri viventi di una specie (genere, famiglia,…), non scompare però la specie, che diverrà *estinta*, ma non *sparita*!
Se i tratti orizzontali si interpretano come $\subseteq$, la spirocheta *Jo*, un individuo specifico, è elemento della classe delle spirochete, quindi del phylum dei batteri, ed elemento del regno delle monere. Pertanto $Jo \in$ spirochete, spirochete $\subseteq$ batteri e batteri $\subseteq$ Monere, quindi $Jo \in$ Monere, che potrebbe essere letto come *Jo è una Monera*.
Sempre in questa lettura si può dire che le Monere sono molte. In questa prima interpretazione i tratti orizzontali nello schema stanno a segnalare una relazione d'ordine, data dall'inclusione.
Nella seconda interpretazione biologica, in cui i tratti orizzontali traducono $\in$, $Jo \in$ spirochete (non è vero, bisognerà scendere dalla classe alla specie), ma $Jo \notin$ batteri, in quanto è spirochete $\in$ batteri. E pure spirochete $\notin$ Monere, ma batteri $\in$ Monere. In questo caso non è corretto dire che *Jo* è una Monera, perché il *regno* delle Monere ha due soli elementi: i *phyla* batteri e alghe azzurre. Quindi il regno delle Monere ha pochi elementi. La relazione rappresentata nello schema dai tratti orizzontali non è d'ordine.
Nelle Scienze della Terra si classificano le rocce in base a criteri *genetici* ed anche in base a criteri *chimici*.

La presenza contemporanea di criteri di diversa impostazione, fa sì che le classificazioni in questa disciplina risultino in parte diverse da quelle adottate in Biologia.

In particolare non c'è dubbio che gli oggetti su cui eseguire la classificazione sono le effettive rocce, non già classi di rocce. Una possibile traduzione matematica di questo tipo di classificazioni è offerta dal seguente

Teorema (dell'intersezione di equivalenze). Sia a un insieme non vuoto e siano r,s due relazioni di equivalenza su a. Allora l'insieme $(r\cap s)$ è una relazione di equivalenza su a ed inoltre per ogni $x\in a$, $[x]_{(r\cap s)} = ([x]_r \cap [x]_s)$.

Una situazione differente si ha nelle scienze biologiche. Nella tassonomia ‘ufficiale’ della Biologia, due nomi (*Genus species*) bastano per l’identificazione in base a caratteristiche comuni. Si considera inoltre una suddivisione ancora più "larga" data dalla *famiglia*. Ma in questo si fa uso di una proprietà non detta: la classificazione deve essere tale che gli esseri classificati nello stesso genere debbano essere classificati anche nella stessa famiglia. Si adottano quindi diversi tipi di classificazione e ciò è tradotto nel seguente

Teorema (dell'inclusione di equivalenze). Sia a un insieme non vuoto r,s relazioni di equivalenza su a. Per ogni $x\in a$, si ha $[x]_s = (\bigcup_{ysx}[y]_r)$ sse $r \subseteq s$.

La posizione dei biologi che ritengono il *genere* costituito da *speci*e, la *famiglia* costituita da *generi* e così via, si può presentare matematicamente in modo sostanzialmente diverso. Si considerino per semplicità solo due classificazioni. Siano a un insieme non vuoto e r una relazione di equivalenza su a. L'insieme quoziente $(a/_r)$ nell'esempio biologico diviene l'insieme delle *specie*. La successiva classificazione sulle *specie* dà luogo ai *generi*. Quindi non si hanno due relazioni di equivalenza sullo stesso insieme a, bensì una relazione di equivalenza sull'insieme a ed una sull'insieme $(a/_r)$. Ebbene, in un certo senso, i due modi di procedere discussi sono equivalenti. Infatti si ha il seguente

Teorema (dei quozienti iterati). Siano a un insieme non vuoto, r una relazione di equivalenza su a e s una relazione di equivalenza su $(a/_r)$. Esiste un'equivalenza $(r/_s)$ su a tale che $r \subseteq (r/_s)$ e per ogni $x\in a$, $[x]_{(r/_s)} = \left(\bigcup_{[y]_r\, s\, [x]_r} [y]_r\right)$.

Tale risultato afferma che eseguire successive classificazioni su insiemi quozienti è equivalente ad applicare un'unica classificazione con una più ampia relazione di equivalenza sull'insieme di partenza, perciò l'affermazione che il gatto Isidoro è un felino non è più scorretta, in quanto invece di lavorare prima sulla specie *domestica*, con la relazione r sugli animali poi sul genere *Felis* con l'equivalenza s tra le specie, mediante la relazione $(r_{/s})$ si opera direttamente sugli esseri viventi ottenendo che Isidoro è un felino.